प्रश्नावली 12.2 — चरणबद्ध हल

अध्याय 12 : पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन • कक्षा 10 गणित

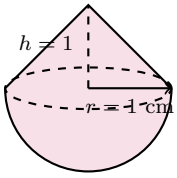
जहाँ अन्यथा न कहा गया हो, $\pi = \dfrac{22}{7}$ लिया गया है।

प्रश्न 1

एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : शंकु व अर्धगोले की त्रिज्या $r = 1$ cm; शंकु की ऊँचाई $h = 1$ cm।
ज्ञात करना है : ठोस का आयतन (π के पदों में)।



$$\begin{aligned}\text{ठोस का आयतन} &= \text{शंकु का आयतन} + \text{अर्धगोले का आयतन}\\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\\ &= \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 1 + \frac{2}{3}\pi \times 1^3\\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\\ &= \pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

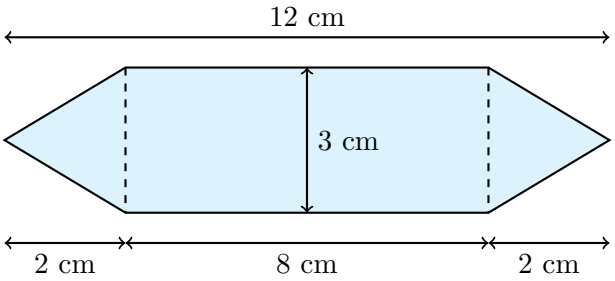
उत्तर : ठोस का आयतन π cm^3 है।

प्रश्न 2

एक इंजीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली एल्यूमीनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इस मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।)

हल :

ज्ञात है : मॉडल का व्यास $= 3$ cm; कुल लंबाई $= 12$ cm; प्रत्येक शंकु की ऊँचाई $= 2$ cm।
ज्ञात करना है : मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन।



$$r = \frac{3}{2}$$
$$r = 1.5 \text{ cm}$$

बेलनाकार भाग की लंबाई $h_1 = 12 - 2 \times 2$

$$h_1 = 8 \text{ cm}$$

शंकु की ऊँचाई $h_2 = 2$ cm

हवा का आयतन = बेलन का आयतन + $2 \times$ शंकु का आयतन

$$= \pi r^2 h_1 + 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$
$$= \pi r^2 \left(h_1 + \frac{2h_2}{3}\right)$$
$$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times \left(8 + \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{22}{7} \times 2.25 \times \frac{28}{3}$$
$$= 22 \times 2.25 \times \frac{4}{3}$$
$$= 66 \text{ cm}^3$$

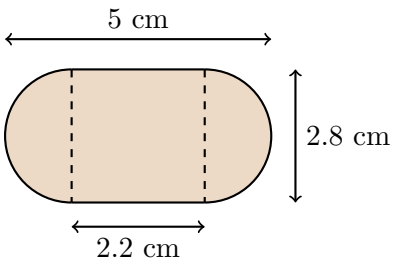
उत्तर : मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन 66 cm^3 है।

प्रश्न 3

एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुनों में लगभग कितनी चाशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है?

हल :

ज्ञात है : गुलाबजामुन की कुल लंबाई = 5 cm; व्यास = 2.8 cm; चाशनी = आयतन का 30%; गुलाबजामुनों की संख्या = 45।
ज्ञात करना है : 45 गुलाबजामुनों में चाशनी का आयतन।



$$r = \frac{2.8}{2}$$
$$r = 1.4 \text{ cm}$$

बेलनाकार भाग की लंबाई $h = 5 - 2 \times 1.4$
$$h = 5 - 2.8$$
$$h = 2.2 \text{ cm}$$

एक गुलाबजामुन का आयतन = बेलन का आयतन + $2 \times$ अर्धगोले का आयतन
$$= \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \pi r^2 \left(h + \frac{4r}{3}\right)$$
$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times \left(2.2 + \frac{5.6}{3}\right)$$
$$= 6.16 \times \frac{12.2}{3}$$
$$\approx 25.05 \text{ cm}^3$$

45 गुलाबजामुनों का आयतन $= 45 \times 6.16 \times \frac{12.2}{3}$
$$= 15 \times 6.16 \times 12.2$$
$$= 1127.28 \text{ cm}^3$$

चाशनी का आयतन $= 1127.28 \times \frac{30}{100}$
$$= 338.184 \text{ cm}^3$$
$$\approx 338 \text{ cm}^3$$

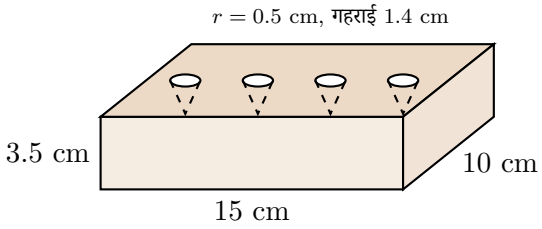
उत्तर : 45 गुलाबजामुनों में लगभग 338 cm^3 चाशनी होगी।

प्रश्न 4

एक कलमदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15 cm $\times$ 10 cm $\times$ 3.5 cm हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : घनाभ की विमाएँ $l = 15$ cm, $b = 10$ cm, $h = 3.5$ cm; 4 शंक्वाकार गड्ढे, प्रत्येक की त्रिज्या $r = 0.5$ cm, गहराई $= 1.4$ cm।
ज्ञात करना है : कलमदान में लकड़ी का आयतन।



$$\begin{aligned}\text{घनाभ का आयतन} &= l \times b \times h \\ &= 15 \times 10 \times 3.5 \\ &= 525 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{एक शंक्वाकार गड्ढे का आयतन} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4 \\ &= \frac{1.1}{3} \\ &\approx 0.367 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{चार गड्ढों का आयतन} &= 4 \times \frac{1.1}{3} \\ &= \frac{4.4}{3} \\ &\approx 1.47 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{लकड़ी का आयतन} &= 525 - 1.47 \\ &= 523.53 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

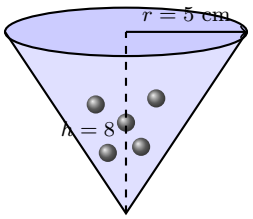
उत्तर : कलमदान में लकड़ी का आयतन लगभग 523.53 cm^3 है।

प्रश्न 5

एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ, जिनमें प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : शंकु की ऊँचाई $h = 8$ cm; ऊपरी सिरे की त्रिज्या $r = 5$ cm; प्रत्येक गोली की त्रिज्या $= 0.5$ cm; बाहर निकला पानी $=$ भरे पानी का $\frac{1}{4}$।
ज्ञात करना है : डाली गई गोलियों की संख्या।



$$\begin{aligned}\text{शंकु (पानी) का आयतन} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 8 \\ &= \frac{4400}{21} \text{ cm}^3\end{aligned}$$

HEMANT KUMAR TEKAN

$$\text{बाहर निकले पानी का आयतन} = \frac{1}{4} \times \frac{4400}{21}$$
$$= \frac{1100}{21} \text{ cm}^3$$

$$\text{एक गोली का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$$
$$= \frac{11}{21} \text{ cm}^3$$

बाहर निकले पानी का आयतन सभी गोलियों के आयतन के बराबर है।

$$\text{गोलियों की संख्या} = \frac{1100}{21} \div \frac{11}{21}$$
$$= \frac{1100}{11}$$
$$= 100$$

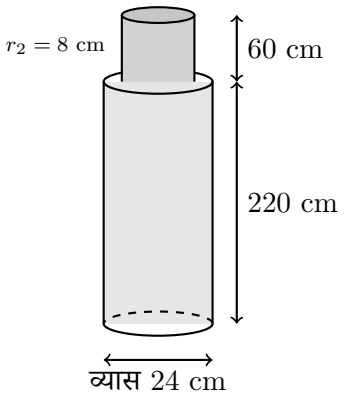
उत्तर : बर्तन में 100 गोलियाँ डाली गई।

प्रश्न 6

ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल :

ज्ञात है : निचला बेलन : ऊँचाई $h_1 = 220$ cm, व्यास $= 24$ cm; ऊपरी बेलन : ऊँचाई $h_2 = 60$ cm, त्रिज्या $r_2 = 8$ cm; 1 cm^3 लोहा $= 8$ g; $\pi = 3.14$।
ज्ञात करना है : लोहे के स्तंभ का द्रव्यमान।



$$r_1 = \frac{24}{2}$$
$$r_1 = 12 \text{ cm}$$

$$\text{निचले बेलन का आयतन} = \pi r_1^2 h_1$$
$$= 3.14 \times 12 \times 12 \times 220$$
$$= 3.14 \times 31680$$

$$= 99475.2 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned}\text{ऊपरी बेलन का आयतन} &= \pi r_2^2 h_2 \\ &= 3.14 \times 8 \times 8 \times 60 \\ &= 3.14 \times 3840 \\ &= 12057.6 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{स्तंभ का कुल आयतन} &= 99475.2 + 12057.6 \\ &= 111532.8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{स्तंभ का द्रव्यमान} &= 111532.8 \times 8 \text{ g} \\ &= 892262.4 \text{ g} \\ &= 892.2624 \text{ kg} \\ &\approx 892.26 \text{ kg}\end{aligned}$$

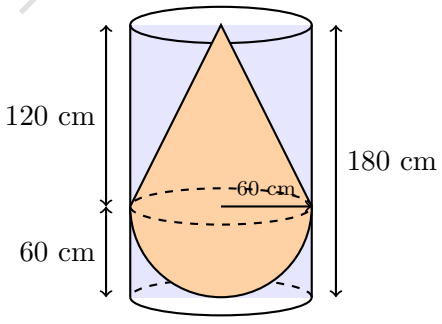
उत्तर : लोहे के स्तंभ का द्रव्यमान लगभग 892.26 kg है।

प्रश्न 7

एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : शंकु : ऊँचाई $h = 120$ cm, त्रिज्या $r = 60$ cm; अर्धगोले की त्रिज्या $r = 60$ cm; बेलन : त्रिज्या $r = 60$ cm, ऊँचाई $H = 180$ cm।
ज्ञात करना है : बेलन में शेष बचे पानी का आयतन।



$$\begin{aligned}\text{बेलन का आयतन} &= \pi r^2 H \\ &= \pi \times 60 \times 60 \times 180 \\ &= 648000\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ठोस का आयतन} &= \text{शंकु का आयतन} + \text{अर्धगोले का आयतन} \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 60^2 \times 120 + \frac{2}{3}\pi \times 60^3\end{aligned}$$

HEMANT KUMAR TEKAN

$$= 144000\pi + 144000\pi$$
$$= 288000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{शेष पानी का आयतन} = 648000\pi - 288000\pi$$
$$= 360000\pi$$
$$= 360000 \times \frac{22}{7}$$
$$\approx 1131428.57 \text{ cm}^3$$
$$\approx 1.131 \text{ m}^3$$

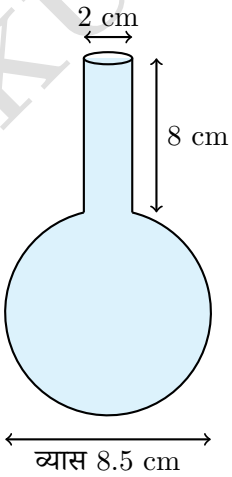
उत्तर : बेलन में शेष पानी का आयतन लगभग 1131428.57 cm^3, अर्थात् लगभग 1.131 m^3 है।

प्रश्न 8

एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है, जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाले पानी की मात्रा को माप कर, एक बच्ची यह ज्ञात करती है कि इस बर्तन का आयतन 345 cm^3 है। जाँच कीजिए कि उस बच्ची का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और $\pi = 3.14$।

हल :

ज्ञात है : गोलाकार भाग का व्यास $= 8.5$ cm; गर्दन (बेलन) की लंबाई $h = 8$ cm, व्यास $= 2$ cm; बच्ची का उत्तर $= 345 \text{ cm}^3$; $\pi = 3.14$।
ज्ञात करना है : बर्तन का वास्तविक आयतन, और क्या बच्ची का उत्तर सही है।



$$\text{गोले की त्रिज्या } R = \frac{8.5}{2}$$
$$R = 4.25 \text{ cm}$$
$$\text{गर्दन की त्रिज्या } r = \frac{2}{2}$$
$$r = 1 \text{ cm}$$

$$\text{गोलाकार भाग का आयतन} = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 4.25 \times 4.25 \times 4.25$$

HEMANT KUMAR KASHYAP

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 76.765625$$
$$\approx 321.39 \text{ cm}^3$$

$$\text{गर्दन का आयतन} = \pi r^2 h$$
$$= 3.14 \times 1 \times 1 \times 8$$
$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

$$\text{बर्तन का कुल आयतन} = 321.39 + 25.12$$
$$= 346.51 \text{ cm}^3$$

$346.51 \neq 345$, अतः बच्ची का उत्तर सही नहीं है।

उत्तर : बर्तन का सही आयतन 346.51 cm^3 है; बच्ची का उत्तर (345 cm^3) सही नहीं है।

HEMANT KUMAR TIWARI