प्रश्नावली 12.1 — चरणबद्ध हल

अध्याय 12 : पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन • कक्षा 10 गणित

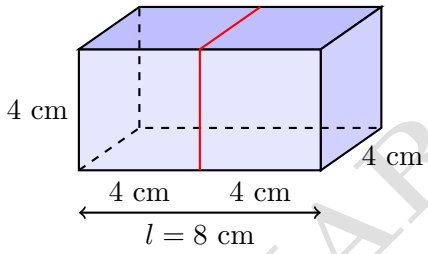
जहाँ अन्यथा न कहा गया हो, $\pi = \dfrac{22}{7}$ लिया गया है।

प्रश्न 1

दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन $64\ \text{cm}^3$ है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : दो घन, प्रत्येक का आयतन $= 64\ \text{cm}^3$; इन्हें संलग्न फलकों से जोड़कर घनाभ बनाया गया।
ज्ञात करना है : बने घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल।



माना घन की भुजा a है।

$$a^3 = 64$$
$$a = \sqrt[3]{64}$$
$$a = 4\ \text{cm}$$

दोनों घनों को मिलाने पर बने घनाभ की विमाएँ :

$$l = 4 + 4$$
$$l = 8\ \text{cm}$$
$$b = 4\ \text{cm}$$
$$h = 4\ \text{cm}$$

$$\begin{aligned}\text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2(lb + bh + hl)\\ &= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 8)\\ &= 2(32 + 16 + 32)\\ &= 2 \times 80\\ &= 160\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

उत्तर : घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $160\ \text{cm}^2$ है।

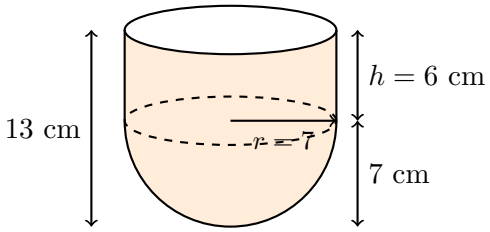
प्रश्न 2

कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास $14\ \text{cm}$ है और इस बर्तन की कुल ऊँचाई $13\ \text{cm}$ है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HEMANT KUMAR TEL

हल :

ज्ञात है : अर्धगोले का व्यास $= 14$ cm; बर्तन की कुल ऊँचाई $= 13$ cm।
ज्ञात करना है : बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल।



$$\text{अर्धगोले की त्रिज्या } r = \frac{14}{2}$$
$$r = 7 \text{ cm}$$

$$\text{बेलन की ऊँचाई } h = 13 - 7$$
$$h = 6 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{बेलन का वक्र पृष्ठ} + \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठ}\\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2\\ &= 2\pi r(h + r)\\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (6 + 7)\\ &= 44 \times 13\\ &= 572 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

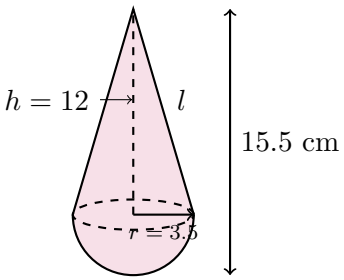
उत्तर : बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 572 cm^2 है।

प्रश्न 3

एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : शंकु व अर्धगोले की त्रिज्या $r = 3.5$ cm; खिलौने की कुल ऊँचाई $= 15.5$ cm।
ज्ञात करना है : खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।



DEEPAK KUMAR TEKAN

$$r = 3.5 \text{ cm}$$

$$\text{शंकु की ऊँचाई } h = 15.5 - 3.5$$
$$h = 12 \text{ cm}$$

$$\text{तिर्यक ऊँचाई } l = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + (3.5)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 12.25}$$
$$= \sqrt{156.25}$$
$$= 12.5 \text{ cm}$$

$$\text{संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \text{शंकु का वक्र पृष्ठ} + \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठ}$$
$$= \pi rl + 2\pi r^2$$
$$= \pi r(l + 2r)$$
$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (12.5 + 7)$$
$$= 11 \times 19.5$$
$$= 214.5 \text{ cm}^2$$

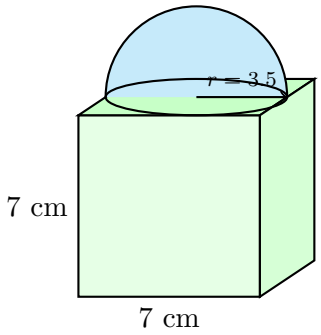
उत्तर : खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5 cm^2 है।

प्रश्न 4

भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : घनाकार ब्लॉक की भुजा $a = 7$ cm; उसके ऊपर एक अर्धगोला रखा है।
ज्ञात करना है : (i) अर्धगोले का अधिकतम व्यास (ii) बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल।



अर्धगोले का अधिकतम व्यास घन की भुजा के बराबर हो सकता है।

$$\text{अधिकतम व्यास} = 7 \text{ cm}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

$$r = 3.5 \text{ cm}$$

अर्धगोला घन के ऊपरी फलक का πr^2 भाग ढक लेता है, पर स्वयं $2\pi r^2$ वक्र पृष्ठ जोड़ता है।

$$\begin{aligned}\text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \\ &= 6a^2 + \pi r^2 \\ &= 6 \times 7 \times 7 + \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \\ &= 294 + 38.5 \\ &= 332.5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

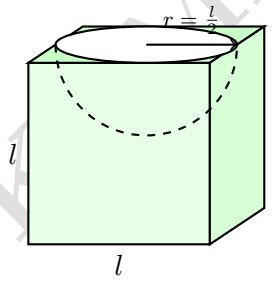
उत्तर : अधिकतम व्यास 7 cm तथा ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल 332.5 cm^2 है।

प्रश्न 5

एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अंदर की ओर से काटकर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : घन का किनारा $= l$; अर्धगोलाकार गड्ढे का व्यास $= l$।
ज्ञात करना है : शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल।



माना घन का किनारा l है।

$$\begin{aligned}\text{अर्धगोले का व्यास} &= l \\ r &= \frac{l}{2}\end{aligned}$$

गड्ढा बनाने पर एक फलक से πr^2 भाग हटता है और अंदर $2\pi r^2$ वक्र पृष्ठ बनता है।

$$\begin{aligned}\text{शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 6l^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \\ &= 6l^2 + \pi r^2 \\ &= 6l^2 + \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= 6l^2 + \frac{\pi l^2}{4} \\ &= \frac{l^2}{4}(24 + \pi)\end{aligned}$$

उत्तर : शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल $\frac{l^2}{4}(24 + \pi)$ वर्ग इकाई है।

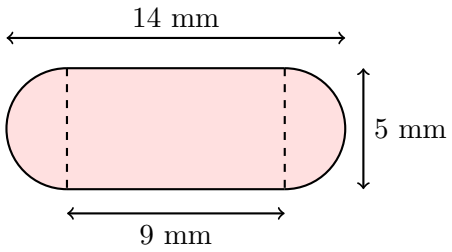
HEMANT KUMAR PAN

प्रश्न 6

दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है। पूरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : कैप्सूल की कुल लंबाई $= 14$ mm; व्यास $= 5$ mm; दोनों सिरों पर अर्धगोले।
ज्ञात करना है : कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल।



$$r = \frac{5}{2}$$
$$r = 2.5 \text{ mm}$$

बेलनाकार भाग की लंबाई $h = 14 - 2 \times 2.5$
$$h = 14 - 5$$
$$h = 9 \text{ mm}$$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठ + $2 \times$ अर्धगोले का वक्र पृष्ठ
$$= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r(h + 2r)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times (9 + 5)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times 14$$
$$= 220 \text{ mm}^2$$

उत्तर : कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल 220 mm^2 है।

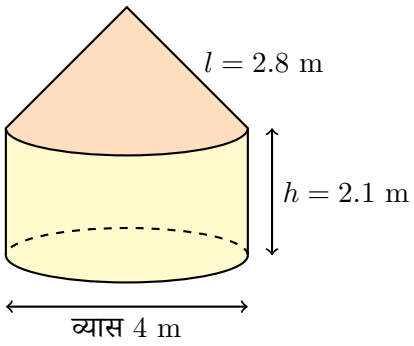
प्रश्न 7

कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः 2.1 m और 4 m हैं तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है, तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, ₹500 प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है।)

हल :

ज्ञात है : बेलनाकार भाग की ऊँचाई $h = 2.1$ m, व्यास $= 4$ m; शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = 2.8$ m; दर ₹500 प्रति m^2; आधार ढका नहीं जाता।
ज्ञात करना है : (i) कैनवस का क्षेत्रफल (ii) कैनवस की लागत।

HEMANT KUMAR TEKAN



$$r = \frac{4}{2}$$
$$r = 2 \text{ m}$$
$$h = 2.1 \text{ m}$$
$$l = 2.8 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
\text{कैनवस का क्षेत्रफल} &= \text{बेलन का वक्र पृष्ठ} + \text{शंकु का वक्र पृष्ठ} \\
&= 2\pi rh + \pi rl \\
&= \pi r(2h + l) \\
&= \frac{22}{7} \times 2 \times (2 \times 2.1 + 2.8) \\
&= \frac{22}{7} \times 2 \times 7 \\
&= 44 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{कैनवस की लागत} &= 44 \times 500 \\
&= ₹\, 22000
\end{aligned}$$

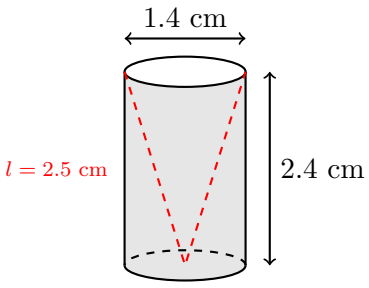
उत्तर : कैनवस का क्षेत्रफल 44 m^2 तथा लागत ₹22000 है।

प्रश्न 8

ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : बेलन की ऊँचाई $= 2.4$ cm, व्यास $= 1.4$ cm; इसी ऊँचाई व व्यास का शंक्वाकार खोल काटा गया।
ज्ञात करना है : शेष ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (निकटतम cm^2 तक)।



$$r = \frac{1.4}{2}$$
$$r = 0.7 \text{ cm}$$
$$h = 2.4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } l &= \sqrt{h^2 + r^2} \\ &= \sqrt{(2.4)^2 + (0.7)^2} \\ &= \sqrt{5.76 + 0.49} \\ &= \sqrt{6.25} \\ &= 2.5 \text{ cm}\end{aligned}$$

शेष ठोस में बेलन का वक्र पृष्ठ, ऊपर का एक वृत्ताकार सिरा और शंकु का भीतरी वक्र पृष्ठ बचते हैं।

$$\begin{aligned}\text{संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl \\ &= \pi r(2h + r + l) \\ &= \frac{22}{7} \times 0.7 \times (4.8 + 0.7 + 2.5) \\ &= 2.2 \times 8 \\ &= 17.6 \text{ cm}^2 \\ &\approx 18 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

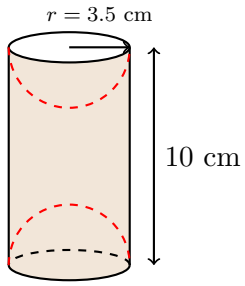
उत्तर : शेष ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 18 cm^2 है।

प्रश्न 9

लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ज्ञात है : बेलन की ऊँचाई $h = 10$ cm, आधार की त्रिज्या $r = 3.5$ cm; दोनों सिरों से अर्धगोले खोदकर निकाले गए।
ज्ञात करना है : वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।



$$r = 3.5 \text{ cm}$$
$$h = 10 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{बेलन का वक्र पृष्ठ} + 2 \times \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठ} \\ &= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r(h + 2r)\end{aligned}$$

HEMANT KUMAR TEKAN

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times (10 + 7)$$
$$= 22 \times 17$$
$$= 374 \text{ cm}^2$$

उत्तर : वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 374 cm^2 है।

HEMANT KUMAR TEKAN