दो चरों वाले रैखिक समीकरण

कक्षा 9 गणित • अध्याय 4 • विस्तृत अध्ययन सामग्री (NCERT पर आधारित, चित्र सहित)

1. परिचय : एक चर से दो चर तक

पिछली कक्षाओं में हमने **एक चर वाले रैखिक समीकरण** पढ़े हैं, जैसे $x+1=0$, $x+\sqrt{2}=0$, $\sqrt{2}\,y+\sqrt{3}=0$। ऐसे समीकरण का **केवल एक (अद्वितीय) हल** होता है।

अब एक स्थिति देखिए (NCERT) : एक क्रिकेट मैच में भारत के दो बल्लेबाज़ों ने मिलकर 176 रन बनाए। यदि एक बल्लेबाज़ के रन x और दूसरे के रन y मानें, तो

$$x+y=176$$

यहाँ दो अज्ञात राशियाँ (चर) x और y हैं, और दोनों की घात 1 है। ऐसे समीकरण को **दो चरों वाला रैखिक समीकरण** कहते हैं। ध्यान दें कि x और y के बहुत-से मान इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं — जैसे $(100, 76)$, $(88, 88)$, $(150, 26)$ आदि।

2. परिभाषा और मानक रूप

वह समीकरण जिसे

$$ax \;+\; by \;+\; c \;=\; 0$$

के रूप में लिखा जा सके, जहाँ a, b और c **वास्तविक संख्याएँ** हैं तथा a और b **दोनों एक साथ शून्य नहीं** हैं, **दो चरों वाला रैखिक समीकरण** कहलाता है। $ax+by+c=0$ इसका **मानक रूप (व्यापक रूप)** है।

- **चर :** x और y (अज्ञात राशियाँ)।
- x **का गुणांक :** a $\quad$ y **का गुणांक :** b $\quad$ **अचर पद :** c
- "**रैखिक**" इसलिए कि चरों की अधिकतम घात 1 है (x^2, y^2, xy, $\frac{1}{x}$ जैसे पद नहीं होते)।
- शर्त "a और b दोनों शून्य नहीं" इसलिए आवश्यक है कि यदि $a=b=0$ हो, तो समीकरण में कोई चर बचेगा ही नहीं।

पहचान कीजिए — रैखिक है या नहीं?

समीकरण	दो चरों में रैखिक?	कारण
$3x+5y=7$	हाँ	दोनों चरों की घात 1
$x-\frac{y}{2}=4$	हाँ	$\frac{y}{2}=\frac{1}{2}y$, घात 1
$x^2+y=5$	नहीं	x की घात 2
$xy+3=0$	नहीं	xy पद की घात 2
$\frac{2}{x}+y=1$	नहीं	$\frac{2}{x}=2x^{-1}$, घात -1
$\sqrt{x}+y=3$	नहीं	$\sqrt{x}=x^{1/2}$

3. दिए गए समीकरण को मानक रूप में लिखना तथा a, b, c ज्ञात करना

विधि :

1. सभी पदों को समीकरण के **बाईं ओर** ले जाइए, ताकि दाईं ओर 0 बचे (पद पक्षांतरित करते समय चिह्न बदलता है)।
2. पदों को क्रम में लिखिए : पहले x वाला पद, फिर y वाला पद, फिर अचर पद।
3. जो चर न हो, उसका गुणांक 0 लिखिए; जो अचर न हो, वहाँ $+0$ लिखिए।

4. अब $ax + by + c = 0$ से तुलना करके a, b, c पढ़िए।

उदाहरण 1 (NCERT)

निम्नलिखित समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए और a, b, c के मान बताइए : (i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

हल :

$$\text{(i)} \quad 2x + 3y = 4.37$$
$$2x + 3y - 4.37 = 0 \quad \Rightarrow \; a = 2,\; b = 3,\; c = -4.37$$

$$\text{(ii)} \quad x - 4 = \sqrt{3}\,y$$
$$x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \; a = 1,\; b = -\sqrt{3},\; c = -4$$

$$\text{(iii)} \quad 4 = 5x - 3y$$
$$5x - 3y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \; a = 5,\; b = -3,\; c = -4$$
$$\text{(अथवा)} \quad -5x + 3y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \; a = -5,\; b = 3,\; c = 4$$

$$\text{(iv)} \quad 2x = y$$
$$2x - y + 0 = 0 \quad \Rightarrow \; a = 2,\; b = -1,\; c = 0$$

ध्यान दें : (iii) में दोनों रूप सही हैं — पूरे समीकरण को -1 से गुणा करने पर भी वही समीकरण रहता है।

उदाहरण 2 (NCERT) — एक चर वाले समीकरण को दो चरों में लिखना

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$ को दो चरों वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।

हल : जो चर नहीं है, उसका गुणांक 0 मानिए।

$$\text{(i)} \quad x + 5 = 0$$
$$1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0 \quad (a = 1,\; b = 0,\; c = 5)$$

$$\text{(ii)} \quad y - 2 = 0$$
$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0 \quad (a = 0,\; b = 1,\; c = -2)$$

$$\text{(iii)} \quad 2x - 3 = 0$$
$$2x + 0 \cdot y - 3 = 0 \quad (a = 2,\; b = 0,\; c = -3)$$

$$\text{(iv)} \quad 5y - 2 = 0$$
$$0 \cdot x + 5y - 2 = 0 \quad (a = 0,\; b = 5,\; c = -2)$$

प्रश्नावली 4.1, प्रश्न 2 — सभी भाग (सारणी में) :

भाग	दिया समीकरण	मानक रूप	a	b	c
(i)	$2x + 3y = 9.3\overline{5}$	$2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0$	2	3	$-9.3\overline{5}$
(ii)	$x - \frac{y}{5} - 10 = 0$	$x - \frac{1}{5}y - 10 = 0$	1	$-\frac{1}{5}$	-10
(iii)	$-2x + 3y = 6$	$-2x + 3y - 6 = 0$	-2	3	-6
(iv)	$x = 3y$	$x - 3y + 0 = 0$	1	-3	0
(v)	$2x = -5y$	$2x + 5y + 0 = 0$	2	5	0
(vi)	$3x + 2 = 0$	$3x + 0 \cdot y + 2 = 0$	3	0	2
(vii)	$y - 2 = 0$	$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$	0	1	-2
(viii)	$5 = 2x$	$-2x + 0 \cdot y + 5 = 0$	-2	0	5

4. शाब्दिक कथन को समीकरण में बदलना

उदाहरण 3 (प्रश्नावली 4.1, प्रश्न 1)

एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दो गुनी है। इस कथन को दो चरों वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।
हल : माना नोटबुक की कीमत ₹ x और कलम की कीमत ₹ y है।

$$\begin{aligned} \text{नोटबुक की कीमत} &= 2 \times \text{कलम की कीमत} \\ x &= 2y \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

अर्थात् $x - 2y + 0 = 0$, जहाँ $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$।

और उदाहरण :

- दो संख्याओं का योग 25 है : $x + y = 25 \Rightarrow x + y - 25 = 0$
- एक संख्या दूसरी से 7 अधिक है : $x = y + 7 \Rightarrow x - y - 7 = 0$
- 3 पेन और 2 कॉपी का कुल मूल्य ₹ 50 है : $3x + 2y = 50 \Rightarrow 3x + 2y - 50 = 0$

5. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का हल

x और y के मानों का वह **युग्म** जो समीकरण को **संतुष्ट** करता है (अर्थात् रखने पर बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष), समीकरण का **हल** कहलाता है। हल को **क्रमित युग्म** $(x,\ y)$ के रूप में लिखते हैं — पहले x का मान, फिर y का मान।
उदाहरण : $2x + 3y = 12$ में $x = 3,\ y = 2$ रखने पर

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= 2 \times 3 + 3 \times 2 \\ &= 6 + 6 \\ &= 12 \\ &= \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

अतः $(3,\ 2)$ एक हल है। इसी प्रकार $(0,\ 4)$, $(6,\ 0)$ भी हल हैं। परंतु $(1,\ 4)$ हल नहीं है, क्योंकि $2 \times 1 + 3 \times 4 = 14 \neq 12$।
हल ज्ञात करने की विधि :

1. किसी एक चर (प्रायः x) का कोई भी सुविधाजनक मान चुनिए।
2. उसे समीकरण में रखिए; अब एक चर वाला समीकरण बचेगा।
3. उसे हल करके दूसरे चर (y) का मान ज्ञात कीजिए।
4. $(x,\ y)$ लिखिए। $x = 0$ और $y = 0$ रखकर दो हल सबसे आसानी से मिलते हैं।

उदाहरण 4 (NCERT) — समीकरण $x + 2y = 6$ के चार हल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned}
x = 0 \text{ रखने पर :} \quad 0 + 2y &= 6 \\
y &= 3 \qquad \Rightarrow (0,\, 3) \\
y = 0 \text{ रखने पर :} \quad x + 0 &= 6 \\
x &= 6 \qquad \Rightarrow (6,\, 0) \\
x = 2 \text{ रखने पर :} \quad 2 + 2y &= 6 \\
2y &= 4 \\
y &= 2 \qquad \Rightarrow (2,\, 2) \\
x = 4 \text{ रखने पर :} \quad 4 + 2y &= 6 \\
2y &= 2 \\
y &= 1 \qquad \Rightarrow (4,\, 1)
\end{aligned}$$

अतः $(0, 3)$, $(6, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ चार हल हैं।

उदाहरण 5 (प्रश्नावली 4.2, प्रश्न 2) — प्रत्येक समीकरण के चार हल

(i) $2x + y = 7$ **:** $y = 7 - 2x$

x	0	1	2	3
$y = 7 - 2x$	7	5	3	1

हल : $(0, 7)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$

(ii) $\pi x + y = 9$ **:** $y = 9 - \pi x$

x	0	1	2	-1
$y = 9 - \pi x$	9	$9 - \pi$	$9 - 2\pi$	$9 + \pi$

हल : $(0, 9)$, $(1, 9 - \pi)$, $(2, 9 - 2\pi)$, $(-1, 9 + \pi)$

(iii) $x = 4y$ **:** x के स्थान पर y चुनना आसान है।

y	0	1	2	-1
$x = 4y$	0	4	8	-4

हल : $(0, 0)$, $(4, 1)$, $(8, 2)$, $(-4, -1)$

6. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के कितने हल होते हैं?

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक (अनंत) हल होते हैं।

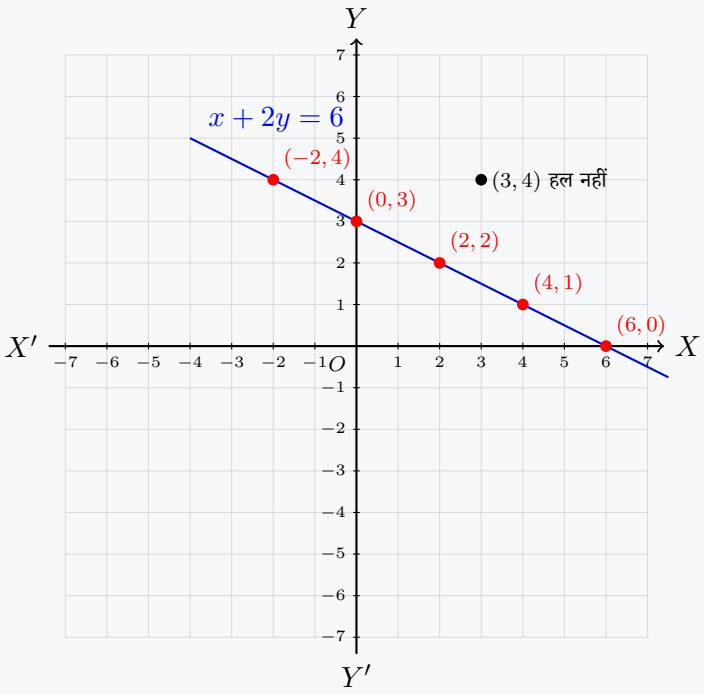
कारण : x का हम कोई भी वास्तविक मान चुन सकते हैं (0, 1, -2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, π, ...), और प्रत्येक मान के लिए y का एक संगत मान मिल जाता है। चूँकि x के मान अनंत हैं, इसलिए हल भी अनंत हैं।

प्रश्नावली 4.2, प्रश्न 1 : $y = 3x + 5$ का — (i) एक अद्वितीय हल है, (ii) केवल दो हल हैं, (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। **उत्तर : (iii)**

तुलना :

	एक चर वाला रैखिक समीकरण	दो चरों वाला रैखिक समीकरण
उदाहरण	$2x + 3 = 7$	$2x + 3y = 7$
हलों की संख्या	केवल एक (अद्वितीय)	अनंत
हल का रूप	एक संख्या, जैसे $x = 2$	क्रमित युग्म, जैसे $(2, 1)$

ज्यामितीय अर्थ (अध्याय 3 से जोड़) : हर हल (x, y) कार्तीय तल का एक बिंदु है। $x + 2y = 6$ के सभी हल-बिंदु **एक ही सीधी रेखा** पर स्थित होते हैं। इसीलिए इसे "रैखिक" (रेखा वाला) समीकरण कहते हैं। रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु एक हल है, और रेखा से बाहर का कोई बिंदु हल नहीं है।



चित्र 1 : $x + 2y = 6$ के सभी हल एक सीधी रेखा पर; $(3, 4)$ रेखा पर नहीं, अतः हल नहीं

7. जाँचना कि दिया गया बिंदु समीकरण का हल है या नहीं

विधि : दिए गए x और y के मान समीकरण के बाएँ पक्ष में रखिए। यदि बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष, तो बिंदु हल है; अन्यथा नहीं।

HEMA

उदाहरण 6 (प्रश्नावली 4.2, प्रश्न 3)

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन समीकरण $x - 2y = 4$ के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं : (i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

हल : दायाँ पक्ष $= 4$।

(i) बायाँ पक्ष $= 0 - 2 \times 2$
$= -4 \neq 4$ $\therefore (0, 2)$ हल नहीं है।

(ii) बायाँ पक्ष $= 2 - 2 \times 0$
$= 2 \neq 4$ $\therefore (2, 0)$ हल नहीं है।

(iii) बायाँ पक्ष $= 4 - 2 \times 0$
$= 4$ $\therefore (4, 0)$ हल है।

(iv) बायाँ पक्ष $= \sqrt{2} - 2 \times 4\sqrt{2}$
$= \sqrt{2} - 8\sqrt{2}$
$= -7\sqrt{2} \neq 4$ $\therefore$ हल नहीं है।

(v) बायाँ पक्ष $= 1 - 2 \times 1$
$= -1 \neq 4$ $\therefore (1, 1)$ हल नहीं है।

8. दिए गए x, y मान रखकर अज्ञात राशि (अचर) का मान ज्ञात करना

यदि कोई बिंदु समीकरण का हल है, तो उसके x, y मान रखने पर समीकरण संतुष्ट होगा। इससे बना एक चर वाला समीकरण हल करके अज्ञात अचर (k, a, p आदि) ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 7 (प्रश्नावली 4.2, प्रश्न 4)

k का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x = 2,\ y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल हो।

ज्ञात है : $x = 2,\ y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का हल है।
ज्ञात करना है : k का मान।

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= k \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 &= k \\ 4 + 3 &= k \\ k &= 7 \end{aligned}$$

उदाहरण 8

यदि $(2, -1)$ समीकरण $3x + ay = 8$ का हल है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 3 \times 2 + a \times (-1) &= 8 \\ 6 - a &= 8 \\ -a &= 2 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

उदाहरण 9

यदि बिंदु $(3,\ 4)$ रेखा $3y = ax + 7$ पर स्थित है, तो a ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 3 \times 4 &= a \times 3 + 7 \\ 12 &= 3a + 7 \\ 3a &= 5 \\ a &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

उदाहरण 10

समीकरण $2x + 3y = 12$ का वह हल ज्ञात कीजिए जिसमें x और y बराबर हों।

$x = y$ रखने पर : $\quad 2x + 3x = 12$

$$\begin{aligned} 5x &= 12 \\ x &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

अतः हल $\left(\frac{12}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ है।

9. अक्षों पर स्थित हल (अध्याय 3 से जोड़)

- $x = 0$ रखने पर मिला हल $(0,\ y)$ **y-अक्ष** पर स्थित बिंदु है।
- $y = 0$ रखने पर मिला हल $(x,\ 0)$ **x-अक्ष** पर स्थित बिंदु है।
- यदि $c = 0$ हो (जैसे $x = 4y$, $2x + 5y = 0$), तो $(0, 0)$ हमेशा एक हल है, अर्थात् रेखा **मूल बिंदु** से होकर जाती है।
- $x = -5$ (अर्थात् $1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$) के सभी हल $(-5,\ y)$ रूप के हैं — यह y-अक्ष के समांतर रेखा है। $y = 2$ के सभी हल $(x,\ 2)$ रूप के हैं — यह x-अक्ष के समांतर रेखा है।

याद रखें

- मानक रूप : $ax + by + c = 0$; a, b, c वास्तविक संख्याएँ, a और b दोनों शून्य नहीं।
- मानक रूप में लाते समय पद पक्षांतरण पर **चिह्न बदलना** न भूलें; दाईं ओर केवल 0 रहे।
- जो चर न दिखे उसका गुणांक 0 है; जैसे $y - 2 = 0$ में $a = 0$।
- हल हमेशा क्रमित युग्म (x, y) — पहले x, फिर y।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के **अनंत हल** होते हैं; सभी हल एक सीधी रेखा पर होते हैं।
- बिंदु हल है या नहीं : मान रखकर बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष जाँचें।
- अज्ञात अचर : दिए गए x, y रखें और एक चर वाला समीकरण हल करें।

10. सामान्य त्रुटियाँ (परीक्षा में ध्यान दें)

गलत	सही
$4 = 5x - 3y$ से $5x - 3y + 4 = 0$	4 को बाईं ओर ले जाने पर -4 : $5x - 3y - 4 = 0$
$x = 3y$ में c नहीं है, अतः प्रश्न अधूरा	$x - 3y + 0 = 0$, अर्थात् $c = 0$
$y - 2 = 0$ दो चरों वाला समीकरण नहीं	$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$ के रूप में यह दो चरों में है
हल $(2, 1)$ को $(1, 2)$ लिखना	पहले x का मान, फिर y का
"दो चरों वाले समीकरण के दो हल होते हैं"	हल अनंत होते हैं

11. अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर a, b, c बताइए :
   (i) $3x = 7y - 2$ (ii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (iii) $y = -4$ (iv) $6 = x$
2. "दो संख्याओं का अंतर 9 है" को दो चरों वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।
3. समीकरण $3x + 2y = 12$ के तीन हल ज्ञात कीजिए।
4. जाँचिए कि $(1, -1)$ और $(2, 3)$ समीकरण $5x - 2y = 7$ के हल हैं या नहीं।
5. यदि $(-1, 2)$ समीकरण $kx + 3y = 10$ का हल है, तो k ज्ञात कीजिए।
6. समीकरण $x - 3y = 6$ के वे हल ज्ञात कीजिए जो (क) x-अक्ष पर और (ख) y-अक्ष पर स्थित हों।
7. रिक्त स्थान : $y = 5x + 2$ के _____ हल होते हैं।

उत्तर : 1. (i) $3x - 7y + 2 = 0$; $a = 3, b = -7, c = 2$ (ii) $3x + 2y - 6 = 0$; $a = 3, b = 2, c = -6$ (iii) $0 \cdot x + y + 4 = 0$; $a = 0, b = 1, c = 4$ (iv) $x + 0 \cdot y - 6 = 0$; $a = 1, b = 0, c = -6$। 2. $x - y - 9 = 0$। 3. जैसे $(0, 6)$, $(4, 0)$, $(2, 3)$। 4. $(1, -1)$: $5 + 2 = 7$, हल है; $(2, 3)$: $10 - 6 = 4 \neq 7$, हल नहीं। 5. $-k + 6 = 10$, अतः $k = -4$। 6. (क) $(6, 0)$ (ख) $(0, -2)$। 7. अनंत (अपरिमित रूप से अनेक)।

HEMANT