निर्देशांक ज्यामिति : कार्तीय पद्धति

कक्षा 9 गणित • अध्याय 3 • विस्तृत अध्ययन सामग्री (चित्र सहित)

1. परिचय

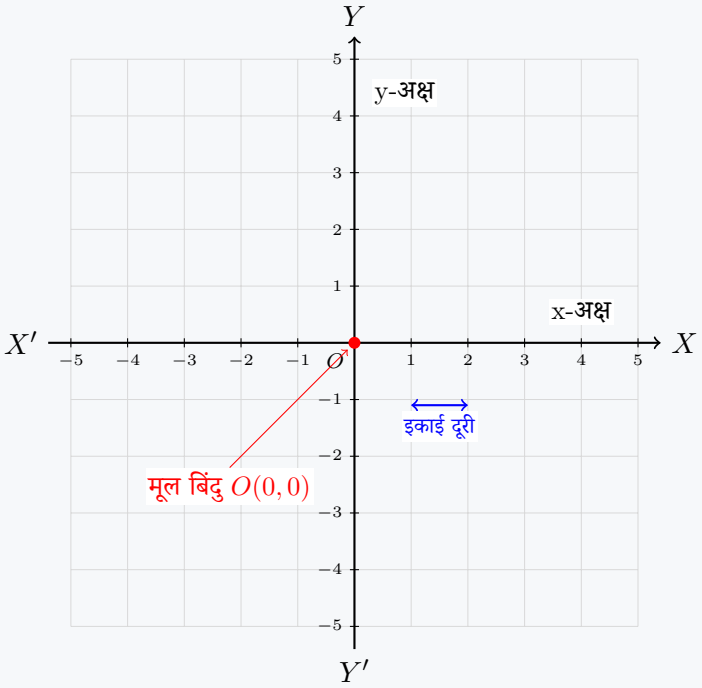
किसी समतल (जैसे कागज़, ब्लैकबोर्ड या कमरे का फर्श) पर किसी बिंदु की **सही स्थिति** बताने के लिए हमें दो संदर्भ रेखाओं की आवश्यकता होती है।

उदाहरण : कक्षा में किसी विद्यार्थी की सीट बताने के लिए हम कहते हैं "तीसरी पंक्ति में चौथी सीट"। यहाँ दो संख्याएँ (पंक्ति और सीट) मिलकर स्थिति को पूरी तरह तय करती हैं। केवल "तीसरी पंक्ति" कहने से स्थिति तय नहीं होती।

इसी विचार को फ्रांसीसी गणितज्ञ और दार्शनिक **रेने देकार्त (René Descartes, 1596–1650)** ने गणितीय रूप दिया। उनके नाम पर ही इस पद्धति को **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** कहते हैं। इसमें एक समतल पर दो परस्पर लंब संख्या रेखाओं की सहायता से किसी भी बिंदु की स्थिति दो संख्याओं द्वारा बताई जाती है।

2. x-अक्ष, y-अक्ष, मूल बिंदु और इकाई दूरी

- **x-अक्ष :** समतल पर खींची गई एक **क्षैतिज (आड़ी)** संख्या रेखा $X'OX$ को x-अक्ष कहते हैं।
- **y-अक्ष :** x-अक्ष पर लंबवत खींची गई **ऊर्ध्वाधर (खड़ी)** संख्या रेखा $Y'OY$ को y-अक्ष कहते हैं।
- **निर्देशांक अक्ष :** x-अक्ष और y-अक्ष को मिलाकर **निर्देशांक अक्ष** कहते हैं।
- **मूल बिंदु (Origin) :** दोनों अक्ष जिस बिंदु पर एक-दूसरे को काटते हैं, उसे **मूल बिंदु** कहते हैं। इसे O से दर्शाते हैं। इसके निर्देशांक $(0,\ 0)$ होते हैं।
- **इकाई दूरी (Unit Distance) :** दोनों अक्षों पर मूल बिंदु से बराबर-बराबर दूरी पर चिह्न लगाकर $1, 2, 3, \ldots$ अंकित किए जाते हैं। दो क्रमागत चिह्नों के बीच की यह बराबर दूरी **इकाई दूरी** (एक इकाई) कहलाती है। दोनों अक्षों पर सामान्यतः एक ही इकाई (जैसे $1\ \text{cm} = 1$ इकाई) ली जाती है।
- **कार्तीय तल :** जिस समतल पर निर्देशांक अक्ष खींचे गए हों, उसे **कार्तीय तल** या **निर्देशांक तल** या **xy-तल** कहते हैं।

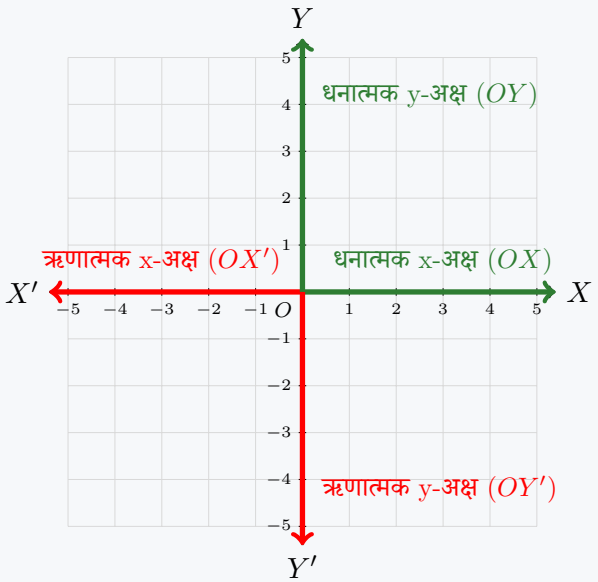


चित्र 1 : निर्देशांक अक्ष, मूल बिंदु और इकाई दूरी

3. धनात्मक और ऋणात्मक x-अक्ष तथा y-अक्ष

मूल बिंदु O प्रत्येक अक्ष को दो भागों में बाँटता है :

भाग	संकेत	दिशा / संख्याएँ
धनात्मक x-अक्ष	OX	मूल बिंदु के **दाईं ओर**; $1, 2, 3, \ldots$
ऋणात्मक x-अक्ष	OX'	मूल बिंदु के **बाईं ओर**; $-1, -2, -3, \ldots$
धनात्मक y-अक्ष	OY	मूल बिंदु के **ऊपर**; $1, 2, 3, \ldots$
ऋणात्मक y-अक्ष	OY'	मूल बिंदु के **नीचे**; $-1, -2, -3, \ldots$



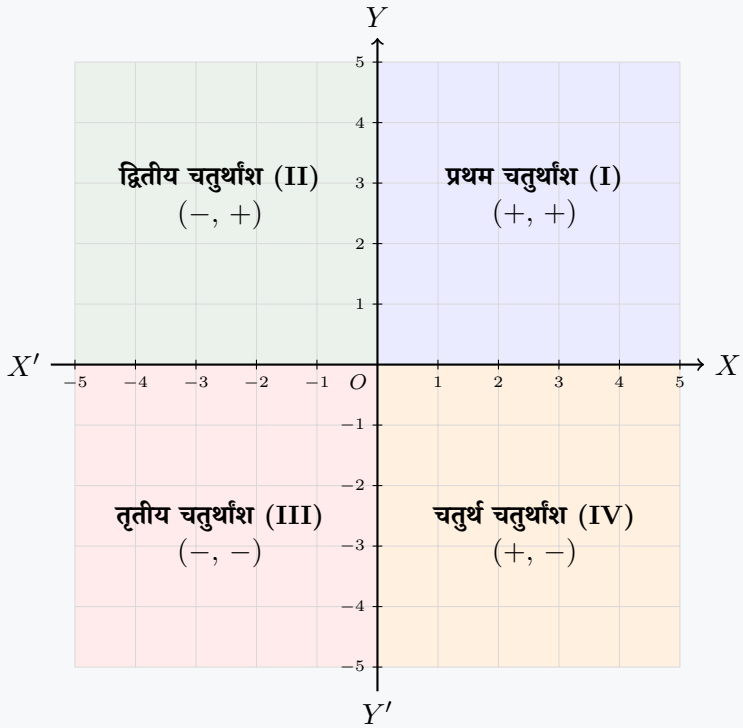
चित्र 2 : अक्षों के धनात्मक (हरा) और ऋणात्मक (लाल) भाग

HEMANT K

4. चतुर्थांश (Quadrants)

दोनों निर्देशांक अक्ष पूरे समतल को **चार बराबर भागों** में बाँटते हैं। प्रत्येक भाग को **चतुर्थांश** कहते हैं। इनकी गिनती OX से शुरू करके **घड़ी की सुइयों की विपरीत दिशा** (वामावर्त) में की जाती है।

- **प्रथम चतुर्थांश (I) :** XOY — धनात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष के बीच।
- **द्वितीय चतुर्थांश (II) :** YOX' — धनात्मक y-अक्ष और ऋणात्मक x-अक्ष के बीच।
- **तृतीय चतुर्थांश (III) :** $X'OY'$ — ऋणात्मक x-अक्ष और ऋणात्मक y-अक्ष के बीच।
- **चतुर्थ चतुर्थांश (IV) :** $Y'OX$ — ऋणात्मक y-अक्ष और धनात्मक x-अक्ष के बीच।



चित्र 3 : चार चतुर्थांश और उनमें निर्देशांकों के चिह्न

प्रत्येक चतुर्थांश में निर्देशांकों के चिह्न :

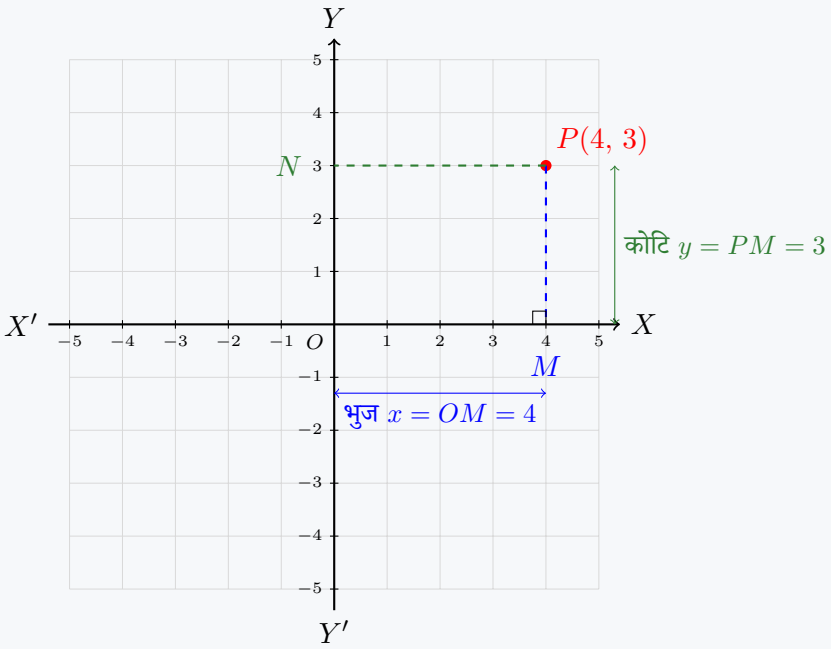
चतुर्थांश	भुज (x)	कोटि (y)	चिह्न	उदाहरण
प्रथम (I)	धनात्मक	धनात्मक	$(+, +)$	$(3, 4)$
द्वितीय (II)	ऋणात्मक	धनात्मक	$(-, +)$	$(-2, 5)$
तृतीय (III)	ऋणात्मक	ऋणात्मक	$(-, -)$	$(-3, -1)$
चतुर्थ (IV)	धनात्मक	ऋणात्मक	$(+, -)$	$(4, -2)$

ध्यान दें : अक्षों पर स्थित कोई भी बिंदु किसी चतुर्थांश में नहीं होता। जैसे $(3, 0)$, $(0, -2)$ और $(0, 0)$ किसी भी चतुर्थांश में नहीं हैं।

5. किसी बिंदु के निर्देशांक : भुज और कोटि

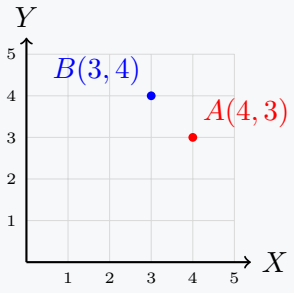
मान लीजिए समतल में कोई बिंदु P है। P से x-अक्ष पर लंब PM और y-अक्ष पर लंब PN डालिए।

- **x-निर्देशांक या भुज (Abscissa) :** बिंदु P की **y-अक्ष से लांबिक दूरी** $(PN = OM)$, x-अक्ष की दिशा में मापी गई। इसे x से दर्शाते हैं।
- **y-निर्देशांक या कोटि (Ordinate) :** बिंदु P की **x-अक्ष से लांबिक दूरी** $(PM = ON)$, y-अक्ष की दिशा में मापी गई। इसे y से दर्शाते हैं।
- बिंदु के निर्देशांक हमेशा **(भुज, कोटि)** अर्थात् (x, y) के रूप में लिखे जाते हैं — पहले भुज, फिर कोटि, कोष्ठक में और बीच में अल्पविराम।



चित्र 4 : बिंदु P का भुज 4 और कोटि 3, अतः $P(4, 3)$

क्रम का महत्व : $(4, 3)$ और $(3, 4)$ अलग-अलग बिंदु हैं। यदि $x \neq y$ है, तो $(x, y) \neq (y, x)$। इसीलिए (x, y) को **क्रमित युग्म** कहते हैं।



चित्र 5 : $A(4, 3)$ और $B(3, 4)$ भिन्न बिंदु हैं

6. अक्षों और निर्देशांकों के विभिन्न नाम

पद	अन्य नाम
x-अक्ष	भुज अक्ष, क्षैतिज अक्ष, $X'OX$ रेखा
y-अक्ष	कोटि अक्ष, ऊर्ध्वाधर अक्ष, $Y'OY$ रेखा
x-निर्देशांक	भुज (Abscissa)
y-निर्देशांक	कोटि (Ordinate)
$(x,\ y)$	बिंदु के निर्देशांक, क्रमित युग्म
मूल बिंदु O	Origin; निर्देशांक $(0,\ 0)$
कार्तीय तल	निर्देशांक तल, xy-तल
कार्तीय पद्धति	आयतीय निर्देशांक पद्धति, निर्देशांक ज्यामिति

7. अक्षों पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक

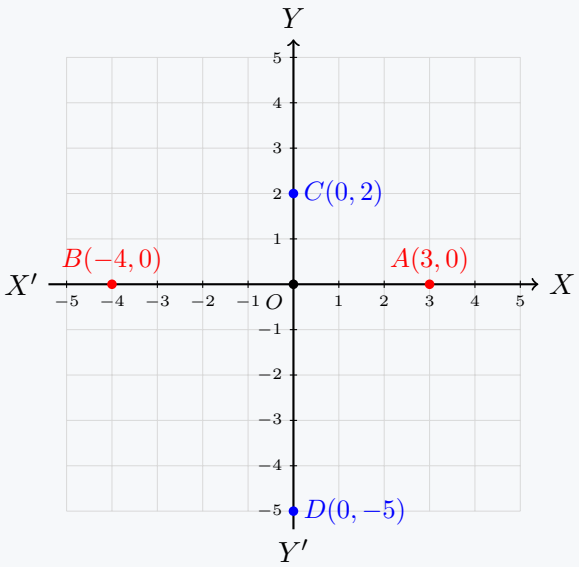
(क) x-अक्ष पर स्थित बिंदु : x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु की x-अक्ष से दूरी शून्य होती है, अतः उसकी **कोटि $= 0$**।

$$\text{x-अक्ष पर बिंदु का व्यापक रूप : } (x,\ 0) \qquad \text{जैसे } (3,0),\ (-4,0)$$

(ख) y-अक्ष पर स्थित बिंदु : y-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु की y-अक्ष से दूरी शून्य होती है, अतः उसका **भुज $= 0$**।

$$\text{y-अक्ष पर बिंदु का व्यापक रूप : } (0,\ y) \qquad \text{जैसे } (0,2),\ (0,-5)$$

(ग) मूल बिंदु : यह दोनों अक्षों पर है, अतः भुज $= 0$ और कोटि $= 0$, अर्थात् $O(0,\ 0)$।



चित्र 6 : x-अक्ष पर बिंदु (लाल) और y-अक्ष पर बिंदु (नीला)

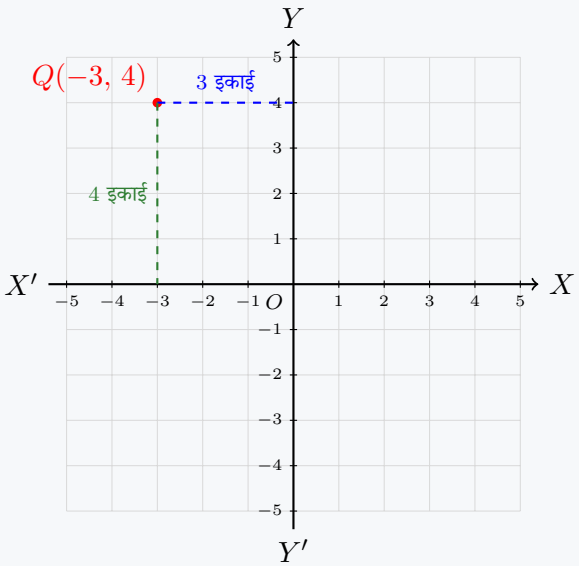
8. बिंदु की अक्षों से दूरी

बिंदु $P(x,\, y)$ के लिए :

- **y-अक्ष से दूरी** = भुज का संख्यात्मक मान = $|x|$ इकाई
- **x-अक्ष से दूरी** = कोटि का संख्यात्मक मान = $|y|$ इकाई

(दूरी कभी ऋणात्मक नहीं होती, इसलिए ऋण चिह्न हटाकर केवल संख्या लेते हैं। ऋण चिह्न केवल **दिशा** बताता है।)

बिंदु	y-अक्ष से दूरी	x-अक्ष से दूरी	स्थिति
$(5,\, 2)$	5 इकाई	2 इकाई	प्रथम चतुर्थांश
$(-3,\, 4)$	3 इकाई	4 इकाई	द्वितीय चतुर्थांश
$(-6,\, -1)$	6 इकाई	1 इकाई	तृतीय चतुर्थांश
$(2,\, -7)$	2 इकाई	7 इकाई	चतुर्थ चतुर्थांश
$(4,\, 0)$	4 इकाई	0 (x-अक्ष पर)	धनात्मक x-अक्ष
$(0,\, -3)$	0 (y-अक्ष पर)	3 इकाई	ऋणात्मक y-अक्ष



चित्र 7 : $Q(-3, 4)$ की y-अक्ष से दूरी 3 इकाई और x-अक्ष से दूरी 4 इकाई

HEMA

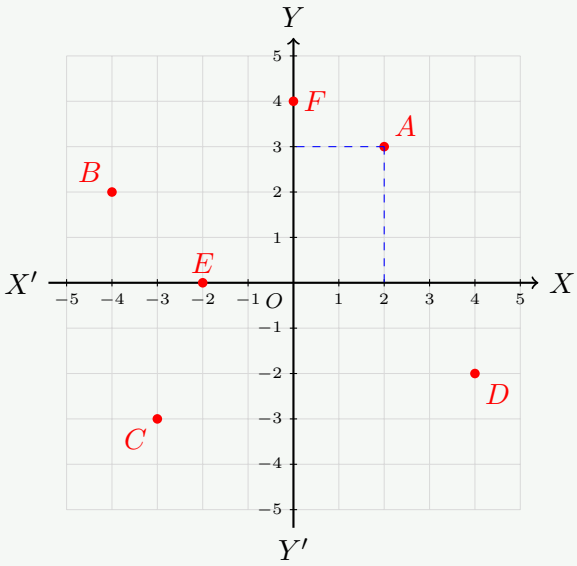
9. दिए गए बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करना

विधि :

1. बिंदु से x-अक्ष पर लंब डालिए। लंब का पाद x-अक्ष पर जिस संख्या पर पड़े, वह **भुज** है (दाईं ओर धनात्मक, बाईं ओर ऋणात्मक)।
2. बिंदु से y-अक्ष पर लंब डालिए। लंब का पाद y-अक्ष पर जिस संख्या पर पड़े, वह **कोटि** है (ऊपर धनात्मक, नीचे ऋणात्मक)।
3. निर्देशांक (भुज, कोटि) के रूप में लिखिए।

उदाहरण 1

नीचे दिए चित्र में बिंदुओं A, B, C, D, E, F के निर्देशांक लिखिए।



हल :

बिंदु	भुज	कोटि	निर्देशांक	स्थिति
A	2	3	$(2, 3)$	प्रथम चतुर्थांश
B	-4	2	$(-4, 2)$	द्वितीय चतुर्थांश
C	-3	-3	$(-3, -3)$	तृतीय चतुर्थांश
D	4	-2	$(4, -2)$	चतुर्थ चतुर्थांश
E	-2	0	$(-2, 0)$	ऋणात्मक x-अक्ष
F	0	4	$(0, 4)$	धनात्मक y-अक्ष

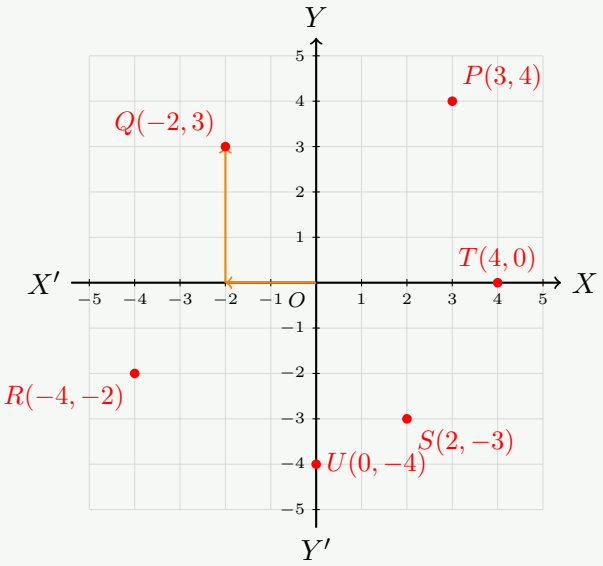
10. दिए गए निर्देशांकों के लिए बिंदु अंकित करना

विधि : बिंदु (x, y) अंकित करने के लिए —

1. मूल बिंदु O से शुरू कीजिए।
2. x-अक्ष पर $|x|$ इकाई चलिए : x धनात्मक हो तो **दाईं ओर**, ऋणात्मक हो तो **बाईं ओर**।
3. वहाँ से y-अक्ष के समांतर $|y|$ इकाई चलिए : y धनात्मक हो तो **ऊपर**, ऋणात्मक हो तो **नीचे**।
4. पहुँचे स्थान पर बिंदु लगाकर उसका नाम लिखिए।

उदाहरण 2

बिंदु $P(3,4)$, $Q(-2,3)$, $R(-4,-2)$, $S(2,-3)$, $T(4,0)$ और $U(0,-4)$ को कार्तीय तल में अंकित कीजिए।
हल : उदाहरण के लिए $Q(-2,3)$: O से 2 इकाई **बाईं ओर**, फिर 3 इकाई **ऊपर**। इसी प्रकार अन्य बिंदु :



चित्र 8 : नारंगी तीर $Q(-2,3)$ तक पहुँचने का मार्ग दिखाते हैं

याद रखें

- मूल बिंदु के निर्देशांक $(0,0)$ होते हैं।
- x-अक्ष पर हर बिंदु की कोटि शून्य : $(x,0)$। y-अक्ष पर हर बिंदु का भुज शून्य : $(0,y)$।
- चिह्न : I $(+,+)$, II $(-,+)$, III $(-,-)$, IV $(+,-)$।
- भुज = y-अक्ष से दूरी; कोटि = x-अक्ष से दूरी।
- (x,y) क्रमित युग्म है; $x \neq y$ हो तो $(x,y) \neq (y,x)$।
- अक्ष पर स्थित बिंदु किसी चतुर्थांश में नहीं होते।
- x-अक्ष का समीकरण $y = 0$ और y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ है।

11. अभ्यास प्रश्न

1. बताइए कि निम्नलिखित बिंदु किस चतुर्थांश या किस अक्ष पर स्थित हैं :
   (i) $(-5, 3)$ (ii) $(7, -1)$ (iii) $(-2, -6)$ (iv) $(0, 8)$ (v) $(-3, 0)$ (vi) $(4, 9)$
2. बिंदु $(-6, 5)$ का भुज और कोटि लिखिए।
3. बिंदु $(3, -8)$ की x-अक्ष और y-अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए।
4. उस बिंदु के निर्देशांक लिखिए जो (क) x-अक्ष पर मूल बिंदु के बाईं ओर 6 इकाई की दूरी पर है, (ख) y-अक्ष पर मूल बिंदु से नीचे 2 इकाई की दूरी पर है।
5. बिंदु $(1,2)$, $(-3,4)$, $(-1,-5)$, $(5,-1)$, $(0,3)$ को ग्राफ़ पेपर पर अंकित कीजिए।
6. रिक्त स्थान भरिए : (क) वह बिंदु जिसका भुज और कोटि दोनों ऋणात्मक हों, _____ चतुर्थांश में होता है। (ख) y-अक्ष पर स्थित बिंदु का _____ शून्य होता है।
7. सत्य/असत्य : बिंदु $(2,3)$ और $(3,2)$ एक ही स्थान पर हैं।

उत्तर : 1. (i) द्वितीय (ii) चतुर्थ (iii) तृतीय (iv) धनात्मक y-अक्ष (v) ऋणात्मक x-अक्ष (vi) प्रथम। 2. भुज $= -6$, कोटि $= 5$। 3. x-अक्ष से 8 इकाई, y-अक्ष से 3 इकाई। 4. (क) $(-6, 0)$ (ख) $(0, -2)$। 6. (क) तृतीय (ख) भुज। 7. असत्य।

HEMANT KUMAR